

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

### Απαντήσεις - Λύσεις

**1.** Δίνεται  $AB = 6\lambda$

Έστω  $M$  τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο

$$MAB \text{ έχουμε: } MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2},$$

$$\text{Ο μέσον του } AB \text{ ή } 50\lambda^2 = 2MO^2 + \frac{36\lambda^2}{2} \text{ ή}$$

$$MO^2 = 16\lambda^2 \text{ ή } MO = 4\lambda = \text{σταθερό}$$

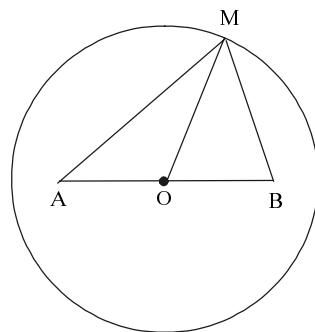
Άρα το σημείο  $M$  απέχει σταθερή απόσταση από το μέσο του  $AB$ , δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος  $(O, 4\lambda)$

**Αντίστροφα:** Έστω ένα σημείο  $M$  του κύκλου  $(O, 4\lambda)$ .

$$\text{Tότε: } MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2(4\lambda)^2 + \frac{36\lambda^2}{2} = 32\lambda^2 + 18\lambda^2 = 50\lambda^2$$

$$\text{Άρα το } M \text{ έχει την ιδιότητα: } MA^2 + MB^2 = 50\lambda^2$$

Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία του κύκλου  $(O, 4\lambda)$ .



**2.** Δίνεται  $AB = 2\lambda$ ,  $O$  το μέσον του.

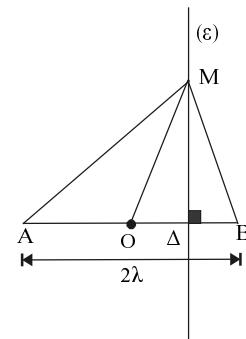
Έστω ένα σημείο  $M$  του επιπέδου με:

$$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot OD \text{ ή } 2\lambda^2 = 2AB \cdot OD$$

$$2\lambda^2 = 4\lambda \cdot OD \text{ ή } OD = \frac{\lambda}{2} = \text{σταθερό}$$

$(MA > MB)$  Το σημείο  $D$  βρίσκεται στην ημιευθεία

$$OB \text{ και απέχει από το } O \text{ σταθερή απόσταση } OD = \frac{\lambda}{2}.$$



Το δε σημείο  $M$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $\epsilon$ , που είναι κάθετη στην  $AB$  στο σημείο  $D$ .

**Αντίστροφα:** Για οποιοδήποτε σημείο  $M$  της ευθείας ( $\varepsilon$ ) ισχύει:

$$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot OM = 2 \cdot 2\lambda \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\lambda^2.$$

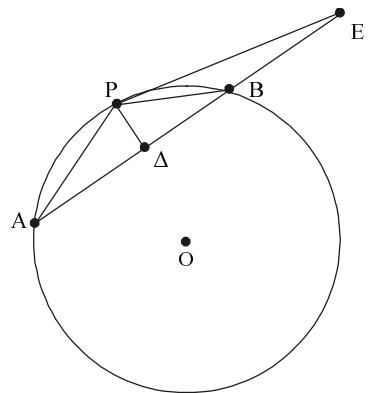
Το  $M$  ικανοποιεί την ιδιότητα του προβλήματος. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία ( $\varepsilon$ ).

3. Έστω  $P$  σημείο του μικρού τόξου  $\widehat{AB}$  ώστε

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{v} \text{ και σημεία } \Delta, E \text{ του } AB \text{ ώστε:}$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{PA}{PB} = \frac{EA}{EB} = \frac{\mu}{v} \quad (1)$$

Σύμφωνα με την (1) αρκεί να χωρίσουμε τη χορδή  $AB$  σε λόγο  $\frac{\mu}{v}$ , εσωτερικά και εξωτερικά.

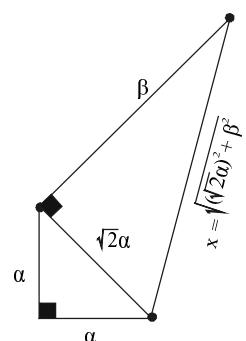


Τότε τα  $\Delta, E$  είναι συζυγή αρμονικά των  $A, B$  και η  $\hat{\Delta}PE = 90^\circ$ . Άρα το  $P$  βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου  $\Delta E$ .

**Κατασκευή:** Γράφουμε κύκλο διαμέτρου  $\Delta E$  όπου η τομή με τον ( $O, R$ ) ορίζει το σημείο  $P$  του  $\widehat{AB}$  (έλασσον) που αντιστοιχεί στη χορδή  $AB$ . Ο κύκλος διαμέτρου  $\Delta E$  τέμνει το μεγάλο τόξο  $\widehat{AB}$  σ' ένα σημείο και δίνει δεύτερη λύση.

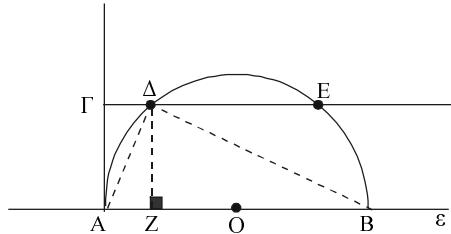
4.  $x^2 = (\sqrt{2}\alpha)^2 + \beta^2$ . Κατασκευάζω:

- i. το  $\sqrt{2}\alpha$ , ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές  $\alpha, \alpha$ .
- ii. το  $x$  ως υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές  $\beta, \sqrt{2}\alpha$ .



5. Πρέπει να είναι  $x + y = 6$   
 $xy = 8 = (2\sqrt{2})^2$

Πάνω σε ευθεία  $\varepsilon$  παίρνουμε τμήμα  $AB = 6$ . Με διάμετρο το  $AB$  γράφουμε ημικύκλιο  $(O, \frac{AB}{2})$ .



Από το  $A$  φέρουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο και σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα  $A\Gamma = 2\sqrt{2}$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία  $\Delta, E$ .

Η κάθετος από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει αυτήν σε σημείο  $Z$ , που τη χωρίζει σε δύο τμήματα  $AZ, ZB$ . Αυτά είναι τα ζητούμενα τμήματα  $x, y$ .

Πράγματι  $AZ + ZB = 6$ . Επίσης εάν φέρουμε τις  $\Delta, \Delta B$ , στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta B$  ισχύει:

$$\Delta Z^2 = AZ \cdot ZB \text{ ή } (2\sqrt{2})^2 = xy$$

Άρα  $AZ = x, ZB = y$ .

**Παρατήρηση:** Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν δύο λύσεις, αφού  $2\sqrt{2} < 3$  και άρα η παράλληλη από το  $\Gamma$  προς την  $AB$  τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία.

6. Έστω  $M$  σημείο της  $\varepsilon$  ώστε

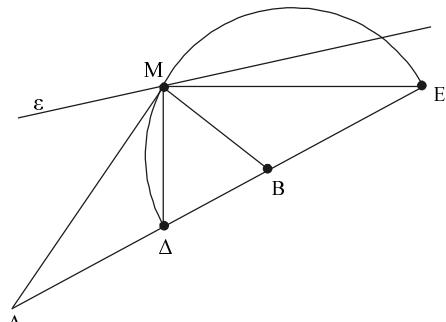
$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{v} \text{ και } \Delta, E \text{ σημεία του } AB$$

$$\text{ώστε } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{v} \quad (1).$$

Τα  $\Delta, E$  είναι τα συζυγή αρμονικά των  $A, B$ , είναι σταθερά και η

$$\hat{\Delta M E} = 90^\circ.$$

Άρα το σημείο  $M$  βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου  $\Delta E$ .



**Κατασκευή:** Προσδιορίζουμε τα  $\Delta$ ,  $E$  ώστε να είναι συζυγή αρμονικά των  $A$ ,  $B$  σύμφωνα με την (1). Γράφουμε κύκλο διαμέτρου  $\Delta E$ . Οι τομές του κύκλου αυτού με την  $\varepsilon$  ορίζουν τα ζητούμενα σημεία  $M$ .

**Παρατήρηση:** Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει η απόσταση του μέσου του  $\Delta E$  από την  $\varepsilon$  να είναι μεγαλύτερη ή ίση με  $\frac{\Delta E}{2}$  (δύο λύσεις ή μία λύση αντίστοιχα).

$$7. MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ (θεώρημα}$$

διαμέσων στο  $\overset{\Delta}{AMB}$ ,  $AB$  σταθερό). Για να είναι το  $MA^2 + MB^2$  ελάχιστο θα πρέπει να είναι ελάχιστο το  $MO$ , το οποίο είναι όταν  $OM \perp (\varepsilon)$  ( $OM \leq OM'$ ),  $M'$  τυχαίο σημείο της  $(\varepsilon)$ .

